Sujet

Pour tout réel α non nul, on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1 **a.** Calculer $(A+I)(2I-A)$.

b. En déduire que $I = \frac{1}{2}(A-I)A$, puis que A est inversible.

Préciser l'inverse de A.

2 On pose $B = \frac{1}{3}(A+I)$ et $C = \frac{1}{3}(2I-A)$.

a. Montrer que $B+C=I$ et $A=2B-C$.

b. Montrer que $B^2=B$ et $C^2=C$.

3 On note $A^0=I$. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$A^n = 2^n B + (-1)^n C.$$